제3부

개념학습,
선택이 아닌 필수다

::

01 외우는 학생들

1. 상처받는 학생

서울의 한 자사고 1학년 학생을 상담한 적이 있습니다. 가져온 문제집 중 못 풀었다고 하는 유리함수 문제를 보며 관련 개념을 물었더니 하나도 모른다고 했습니다. 10년간 이 학생은 무조건 예제 푸는 법을 외워 비슷한 문제에 적용하는 방식으로 문제를 풀었던 것입니다. 이 학생에게 수학 공부라고 하는 것은 온통 문제를 유형별로 나눠 그 푸는 방법을 암기하는 것이었습니다. 그러니 풀어 보지 않은 유형의 문제가 나오면 그냥 못 푼다고 선언하는 것뿐 달리 할 수 있는 게 없었습니다.

이 학생에게 두세 쪽 앞으로 돌아가 개념 설명을 스스로 찾아 읽고 이해할 수 있을 만한 시간을 준 다음 다시 문제를 풀게 했더니 신기하게도 두세 개념이 섞인 문제인데도 해결이 되었습니다. 답이 맞았고 풀이 과

정도 정확했습니다. 이 학생은 문제를 푼 직후 혼잣말을 했습니다. "수학 문제를 이렇게도 풀 수 있구나."

"뭐? 이렇게도 풀 수 있다고?" 어이가 없었습니다.

기억에 남는 상담자는 또 있습니다. 4~5년 동안 주말마다 중고생 수학 학습 상담을 하는 중에 만난 중 2 학생과 학부모입니다. 이 학생은 서울의 사교육 과열 지구에 살고 있는 만큼 초등학교 4학년 때 선행학습을 시작했다고 했습니다. 지금까지 수학 점수는 모두 100점이었고, 줄곧 전교 1등을 해왔으며, 현재 엄마는 전교 학부모 회장이었습니다. 그리고 아이는 그해 5월 당시 고등학교 '기하와 벡터' 과목을 선행 중이었고, 여름방학이면 고등학교 수학의 모든 과정을 마치게 된다고 했습니다.

이 아이는 뭐하러 왔을까요? 여기까지만 들으면 이해가 되지 않습니다. 어려서부터 엄마가 시키는 스케줄을 잘 소화하던 아이가 최근 반항을 시작했기 때문이었습니다. 수학 공부를 더는 하지 않겠다고 했다지요.

"수학 공부가 다 끝났는데 왜 더 하라는 거죠?"

얘기를 나눠 보니 이 아이는 그동안 자기 능력을 뛰어넘는 수학 점수를 암기로 유지해 오고 있었습니다. 그래서 지금까지는 어떻게든 100점을 맞아 왔지만 앞으로가 걱정이었지요. 고 3 진도까지 끝낸다고 해서 공부가 끝나는 게 아니라는 사실도 알아 버렸고요. 쉽게 말해, 이 학생은 '중2병'이었습니다.

중 2는 자기를 알고 부모님을 볼 줄 아는 나이입니다. 사춘기이지요. 사춘기가 되면 상처가 부담으로 나타나기 시작합니다. 수학에 대한 억울함과 부정적인 인식이 솟구치지요. 이때는 100점을 받아도 수학이 싫습니다. 상처 때문에요. 그 100이라는 점수가 자기 사고력을 발휘한 결과가 아니고 암기발, 학원발임을 알게 된 지금, 이 학생에게는 지식의 소유권이 없고, 그래서 자기 성취감이 없었습니다.

2. 개념 없는 문제 풀이의 한계

수학 공부에서 가장 중요한 것은 개념학습이라고들 합니다. 하지만 수학의 개념이 무엇이고, 어떻게 개념학습을 하는지에 대해서는 의견이 분분합니다. 하지만 개념학습법은 정확히 이해할 필요가 있습니다. 그러지 않으면 그냥 선언적인 수준에 그치고 맙니다.

30년 이상 학교에서 수학을 가르친 수학교사로서 필자는 그간 개념학습법을 제대로 설명하지 못했습니다. 이제야 개념학습법을 정립한 것은 수학을 공부한답시고 문제만 푸는 아이들이 너무 많고, 난무하는 여러 이상한 학습법을 바로잡아야 했기 때문입니다. 무엇보다 문제를 풀다 틀렸을 때 상처받는 학생을 많이 봤기 때문입니다.

어느덧 문제 풀이가 우리나라 수학교육의 대명사가 되었습니다. 우리나라 사람들은 '수학' 하면 누구나 문제 풀이를 떠올립니다. 수학 공부에 대한 선배들의 조언에도 문제 풀이에 대한 얘기는 빠지지 않습니다.

"매일 심화 문제를 열 개씩 풀어야 한다."

"문제집은 매일 다섯 장은 해결해야 한다."

"수학 문제를 매일 한 시간씩 꾸준히 풀어야 한다."

수학교육에서는 사실 수학 지식을 쌓는 것보다 논리적 사고력을 키우는 것이 중요합니다. 문제를 푸는 것은 수학 개념의 이해를 통해 논리적 사고력을 연습하는 수단입니다. 그런데 문제 풀이가 개념 이해보다 더 많이 회자되는 것은 주객이 전도된 모습이 아닐 수 없습니다.

문제를 못 풀면 상처가 생긴다

학생들이 수학을 싫어하는 이유는 뭘까요? 수학 개념에 대한 충분한 이해가 부족하기 때문입니다. 이런 상태에서 문제를 풀면 풀리지 않는 문제가 많은 게 당연합니다. 특히 심화 문제나 사고력 문제는 더더욱 풀리지 않을 것입니다. 중요한 것은 문제를 풀지 못할 때마다 상처가 생긴다는 사실입니다. 이 상처는 눈에 보이는 외상이 아니기 때문에 어른들은 이를 소홀히 생각하며 외면하고 무시합니다. 수학을 잘하는 단계에 이르는 데 필요한 피할 수 없는 운명, 성장통이라고 생각합니다. 이런 생각이 꼭 잘못됐다고 하는 것은 아니지만 해결책은 그리 간단하지 않습니다.

문제라고 하는 것은 함부로 풀리면 풀지 못할 가능성이 높아집니다. 실제로 공부를 많이 하는 학생, 상위권 학생에게 문제를 풀지 못한 상처가 많습니다. 이 상처는 곧 수학에 대한 부정적인 인식으로 이어지는데,

이런 과정이 반복되면 수학에서 멀어지는 원인이 됩니다. 그래서 문제를 풀기 전에는 꼭 개념을 충분히 이해해야 합니다. 완벽하게 이해하지 못하면 그만큼 풀지 못하는 문제가 많아지기 때문에 최대한 충분히 개념을 이해한 후 문제를 푸는 것이 최고의 학습법입니다.

한 번 풀지 못한 문제는 영원히 못 풀 가능성이 있다

문제를 처음 풀 때 자기 힘으로 해결하지 못하고 풀이를 외우는 방법으로 문제를 해결했다면, 당장 중간고사 정도는 넘길 수 있을지 몰라도 이 풀이를 장기 기억으로까지 연결할 수 있는 방법은 없습니다. 그래서 한 번 풀지 못한 문제는 영원히 풀지 못할 가능성이 있습니다.

문제가 풀리지 않으면 다급해집니다. 상처가 생기기 때문입니다. 상처가 생기면 치료에 전념해야 하는데, 내공이 강한 학생이 아니고서는 보통 그 치료 방법으로 해답을 선택합니다. 해답을 보면 순간적으로 이제 풀 수 있다고 착각하게 됩니다. 그러나 이때의 해결 능력은 자기 힘이 아니기 때문에 근본적인 개념의 힘이 생긴 것으로 보기 어렵습니다.

우리나라 교과서에서 개념 설명 다음에 나오는 연습 문제는 대부분 그 개념을 바로 이용하면 풀리기 때문에 이 문제를 풀지 못하는 경우는 많지 않습니다. 하지만 심화 문제나 사고력 문제, 종합 문제 등은 직전에 배운 개념만으로 해결되지 않고 이전의 다른 개념을 연결시켜야 풀 수 있습니다. 예를 들면 도형 문제 속에 방정식이나 부등식이 섞여 있기도 하고, 지수와 로그 문제에 삼각함수가 포함되기도 합니다. 학생들은 이

런 문제를 풀 때 수학 선생님은 앞뒤가 맞지 않는 이중 인간이라고 생각합니다.

심화 문제를 풀려면 당연히 개념에 대한 이해를 보다 충분히 갖추어야 합니다. 이전 개념이 부족한 상태에서는 심화 문제를 스스로 해결할 수 없습니다. 그래서 도전했다가 실패하고, 또 도전했다가 실패하고 나면 급기야 해답을 보게 됩니다. 해답에서 이전 개념을 적용한 결과를 보면 납득이 가는 부분이 생기고, 드디어 문제를 풀 수 있게 되기도 합니다. 하지만 이런 상황은 문제를 완전히 해결한 것으로 생각할 수 없습니다. 이 문제에 이용되는 이전 개념과의 관계는 전체적인 것이 아니고 부분적인 것일 가능성이 크기 때문에 이 문제를 풀었다고 해서 이전 개념을 충분히 이해한 것으로 보기에는 어려움이 있습니다. 이 학생은 비슷한 문제가 조금만 다르게 제시되어도 풀지 못할 가능성이 큽니다.

심화 문제든 보통 문제든 문제를 풀다가 풀리지 않고 서너 번 더 시도해도 해결되지 않을 때는 해답을 보는 것도 하나의 방법이 되지만 근본적인 처방은 개념을 다시 돌아보는 것입니다.

애슬럭은 『초등수학 교수법』에서 수학 개념을 충분히 이해하기 전에 문제를 풀게 되면 자동적으로 그 학습 방법은 절차적 방법이 될 것이며, 절차적 학습은 이후에 이어지는 의미 있는 학습, 즉 개념적 학습을 방해할 가능성이 많다고 설명하였습니다. 애슬럭이 말하는 절차적 방법은 개념에 대한 이해 없이 공식이나 문제 푸는 기술만을 익히는 공식암기학습이라고 생각할 수 있습니다.

아이들이 온통 개념이 없다

수학에서 가장 중요한 것이 개념학습이라고 하는데, 실제 학생의 상태를 파악해 보면 이들에게는 개념학습이 거의 되어 있지 않습니다. 초등학생이나 중학생, 고등학생 할 것 없이 개념 이해 상태는 지극히 불량합니다. 어찌된 일인가요? 어떤 내용을 공부했다면 다른 것은 몰라도 개념은 남아 있어야 하는데, 개념은 없고 절차적 지식과 문제 풀이 기술만 남아 있으니 심각한 문제가 아닐 수 없습니다.

초등학교 5학년에게 물었습니다. “$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$은 얼마일까?”

학생 1 : $\frac{2}{10}$입니다.

학생 2 : 아니야! 선생님이 분모가 다를 때는 통분하라고 하셨잖아!

학생 1 : 그래? 그럼 어떻게 해야 해?

학생 2 : 분모가 다를 땐 그냥 곱하면 돼. 4×6=24이니까 24로 통분하면 되겠네.
그럼 $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{6}{24}+\frac{4}{24}=\frac{10}{48}$이야.

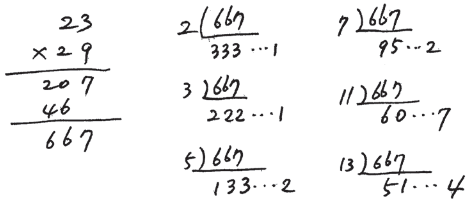
학생 3 : 그렇게 더하는 게 어딨어? 분모가 같을 땐 분자끼리만 더하면 되잖아.
$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{6}{24}+\frac{4}{24}=\frac{10}{24}$ 이렇게.

학생 1 : 근데 분모가 같을 때는 왜 분자만 더해?

학생 3 : 수업 시간에 그렇게 하면 된다고 들었어. 참, 수업 시간에 선생님이 통분은 최소공배수로 하라고 그러셨어.

이번에는 중 1에게 물었습니다. “23×29는 소수素數, prime number일까?”

약수와 배수, 소수와 합성수의 개념을 이해하고 있다면 23×29라는 곱셈만 보고도 이 수가 소수가 아님을 알아차립니다. 1이 아닌 두 수의 곱으로 표현했다는 것은 23과 29가 이미 23×29의 약수라는 얘기니까요. 그런데 많은 학생이 마냥 계산을 시작합니다. 곱해서 667이라는 답을 내고, 그걸 다시 나눕니다. 2부터 시작하여 2로 안 나눠지니까 3으로 5로 나누고, 계속해서 4, 6으로도 막 나눕니다. 애들이 나누는 한계는 보통 13입니다. 13을 넘으면 그다음이 17인데, 이쯤 되면 짜증을 내지요. 그리고 더 안 나눠지는 것으로 결론을 맺고 맙니다. "소수입니다."



23과 29로 곱해져 있으니 23과 29가 곧 이 수의 약수인데, 그걸 생각하지 못하는 것입니다.

이런 예는 또 있습니다. 중 2 초입에 유리수의 성질이 나옵니다. 유리수의 성질이 교과서에는 다음과 같이 정리되어 있습니다.

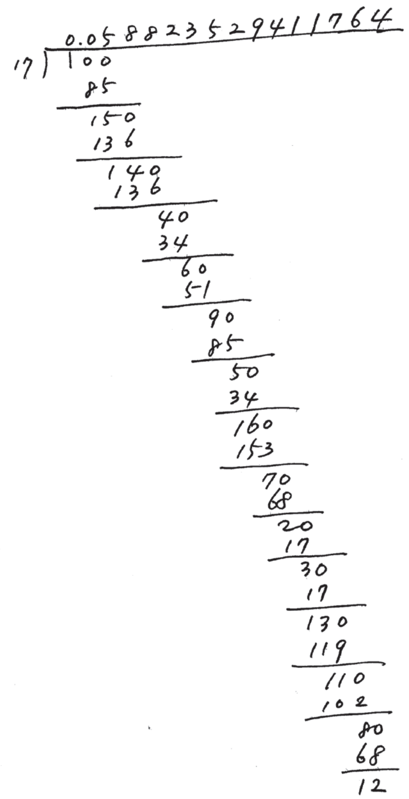
유리수의 소수 표현

① 분모에 2나 5 이외의 소인수가 있는 기약분수는 순환소수로 나타낼 수 있다.

② 유리수는 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있다.

중 2에게 물었습니다. "$\frac{1}{17}$은 순환소수일까?"

개념이 있다면 어떻게 생각해야 할까요? 유리수 $\frac{1}{17}$의 분모 17은 인수가 2나 5로만 되어 있지 않으니 $\frac{1}{17}$은 순환소수가 될 수밖에 없다는 것을 생각해 낼 수 있습니다. 이렇게 아무것도 손댈 것 없이 순환소수라는 답을 낼 수 있습니다.



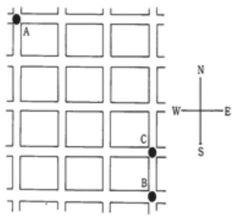
그런데 개념이 없는 많은 학생은 다짜고짜 연필을 듭니다. 그리고 열심히 나눕니다. 1 나누기 17 이라 쓰고 세로로 계속 열다섯 번이나 나눕니다. 순환이 될까요? 안 되겠지요. 같은 숫자가 반복되지 않습니다. 그러다 보면 이제 더는 계산할 수 없게 될 것입니다. 연습장이 밑에까지 다 차버릴 테니까요. 여기서 두 번만 더 나누면 드디어 순환소수라는 사실을 발견하게 될 텐데, 안타깝습니다. 물론 두 번 더 나누지 못해 안타까운 것이 아니라 유리수의 개념을 모르고 있다는 사실이 안타깝습니다.

여기서는 순환소수에 대해 교과서가 좀 더 깊이 있게 가르치지 못하고 있기 때문에 순환의 개념이 정확하게 생기지 못한 것으로 생각할 수 있

습니다. 즉, 왜 유리수는 순환할 수밖에 없는지를 발견하게끔 지도하지 못하고 주입식으로 지식을 제시한 것이 문제입니다. 순환하는 진짜 이유는 나머지가 유한하기 때문입니다. 교과서가 그걸 발견하는 학습 과정을 정확하게 제시했거나 선생님이 수업에서 학습지나 다른 방법을 통해 이러한 내용을 학습하도록 도움으로써 자기주도적으로 순환성을 발견하는 수업이 이루어졌더라면 이렇게 무작정 나누는 일은 하지 않았을 것입니다.

그럼 고등학생은 어떨까요? 다음은 한때 EBS 강의에서도 굉장히 논란이 된 문제입니다.

매일 아침 한 학생이 A에서 B로 걸어간다. 각 교차점에서는 동쪽 또는 남쪽의 길로만 다니고, 갈림길에서 한 방향을 택할 확률은 $\frac{1}{2}$이라고 할 때, 이 학생이 C를 지나갈 확률을 구해 보자.



고 2 정도면 이런 문제를 보통 1분 안에 풉니다. 전체 경우의 수는 $\frac{7!}{3!4!}=35$, C를 거쳐 가는 경우의 수는 $\frac{6!}{3!3!}=20$이므로 구하는 확률은 $\frac{20}{35}$입니다. 이렇게 푸는 학생이 99퍼센트입니다. 그런데 이 풀이가 맞는 것이 아닙니다.

이 문제를 풀 때 필요한 원초적 개념은 초등수학에 있습니다. 초등에서 처음 분수를 배울 때 정확히 개념적으로 배우지 못하고 단순 암기로

배웠다면 그 결과는 이후 고등학교 학습에 악영향을 끼칩니다.

처음 분수를 배울 때는 $\frac{1}{3}$의 의미를 분명 정확히 배웠습니다. '어떤 것을 세 개로 나눈 것 중 하나'가 아니라 어떤 것을 세 개로 '똑같이' 나눈 것 중 하나가 분수 $\frac{1}{3}$의 정확한 정의입니다. 확률이나 분수에서는 똑같이 나눈다는 전제 조건이 아주 중요한 개념인데, 확률 문제를 많이 풀다 보면 이 말이 귀찮아집니다. 동전이나 주사위를 던지는 상황처럼 똑같다는 조건이 이미 친절하게 갖춰진 문제만 많이 풀다 보면 그 민감성이 사라지기도 합니다.

이렇듯 초등학생, 중학생, 고등학생 할 것 없이 우리 아이들에게는 온통 개념적인 학습, 즉 개념학습이 부족합니다. 가장 큰 원인은 학교 정규고사가 대부분 오지선다형이나 단답형 수준에 머물고 대입에 결정적 역할을 하는 수능마저 오지선다형과 단답형으로만 이루어지기 때문입니다. 당연히 찍기 위주의 암기 학습이 성행할 수밖에 없습니다.

이 중 학교 시험이 큰 원인을 제공했다고 봅니다. 범위가 좁은 만큼 정규 고사에서는 개념학습보다 공식암기학습이 위력을 발휘하기 때문입니다. 자기주도적으로 개념학습을 한 학생은 80점대, 사교육에서 공식을 암기하도록 배운 학생은 90점대 점수를 받는 일이 많이 발생하면서 학생이나 부모 모두 개념학습을 멀리하게 되었습니다.

문제는 수능입니다. 수능 문제는 오지선다형이나 단답형으로 출제되어도 단기간의 공식암기학습으로는 해결하기가 어렵습니다. 그러나 이미 11년 동안 몸에 밴 학습 습관을 고칠 수는 없는 일입니다. 다음은 어떤 부모의 목소리입니다.

아이가 사칙연산에서 실수를 하고 단위 표기를 빼먹거나 단위를 착각하는 게 연습이 부족하고 부주의한 탓이라고 생각해서 틀린 문제 위주로 다시 보게 했습니다. 안타깝게도 문제는 개선되지 않고 아이는 수학을 점점 더 싫어하게 되었습니다. 개념이 부족해서라는 걸 왜 진즉 깨닫지 못했는지 후회가 됩니다.

부정확한 개념학습은 고 3 때 드러난다

수학에서는 한 시기에 어떤 개념을 정확히 이해하지 못해도 그냥 아는 것처럼 생각하고 넘어갈 우려가 있습니다. 그런데 정확히 이해하지 못한 개념은 바이러스와 같아서 잠복기로 들어가 버립니다. 계속 새로운 개념이 나오기 때문에 이전 개념을 안다고 착각하여 공식을 암기하다 보면 새로운 개념을 익히는 일은 이내 파묻히고 말지요. 여기에 학교 중간고사나 기말고사에서는 지나간 진도에 대한 시험을 치르지 않기 때문에 이해가 부족한 상태로 한 번 파묻힌 개념은 좀처럼 표면에 나타나지 않습니다.

그러다 고 3이 되면 이 개념이 표면에 드러나기 시작합니다. 3학년이 되면 3월부터 모의고사를 치르는데, 이때 시험 범위는 이전까지 배운 수학의 전체 진도입니다. 이때가 되어서야 과거에 파묻힌 부분을 평가받게 되는 것인데, 여기서 개념 이해가 부족한 부분을 발견하게 되더라도 보통은 어찌할 바를 모르다가 3학년을 그냥 보내게 됩니다. 그래서 3학년 수능 모의고사 수학 성적이 두 등급 이상 오르는 학생은 1퍼센트가 되지 않습니다.

다음은 어떤 부모가 자기의 과거 경험을 쓴 글입니다.

저의 학교 시절을 떠올려 보았어요. 초등학교는 그냥저냥 지나갔고, 중 1부터 순탄치 않았어요. 아랫집 아줌마가 제 수학 선생님이었는데, 시험만 치르면 저를 따로 불러 제가 보는 앞에서 시험지를 채점했어요. 선생님 앞에 서면 완전히 기가 눌렸죠. 중 3이 되자 어머니가 안 되겠다 싶어 저를 집 앞 속셈학원에 보냈는데, 중 3은 저 하나였어요.

선생님과 저녁 7시에 둘이서만 수업을 하는데, 참 어색하더라고요. 그때 인수분해였던가, 제가 잘 몰라서 쩔쩔매니까 선생님은 제가 이해할 때까지 한 문제를 몇 날 며칠 풀어 줬어요. 정말 한 달 후부터 시험에서 100점 맞는 일이 많아지고, 아랫집 선생님 앞에서도 기죽지 않게 된 기억이 있습니다. 하지만 고등학교에 와서 수학 성적은 곤두박질치기 시작했어요. 중학교 때와는 차원이 달랐지요.

아이의 고 3 첫 모의고사에서 충격을 받게 된다는 말을 들으니 식은땀이 났습니다. 결국 끈기 있게 수학을 대하지 않으면 언제든 무너질 수밖에 없습니다.

02 개념과 연결성

1. 개념이란 무엇인가?

수학 학습에서는 수학의 본질적 구조 그 자체와 그것을 둘러싼 연결 관계를 개념이라고 통칭합니다. 수학은 정의定義와 정리定理의 학문입니다. 정의는 초등학교와 중학교에서는 약속이나 뜻으로 표현됩니다. 정리는 정의나 이전의 다른 사실로부터 만들어지는 새로운 사실들인데, 쉽게 말해 공식이나 성질, 법칙 등이 정리입니다. 가장 핵심적인 개념인 정의와 그로부터 파생되는 정리를 유도 또는 증명하는 공부를 하는 것, 그리고 이것들을 연결하는 것이 개념학습입니다.

2. 개념 연결이란 무엇인가?

중 · 고등학생에게 왜 이렇게 수학 개념이 부족한지 이해할 수 없었는데 초등학교 교과서를 보니 깨달을 수 있었습니다. 중 · 고등학교 수학의 모든 개념이 초등학교에 있었기 때문입니다. 결국, 초등학교 수학 개념이 중 · 고등학교로 연결되지 못했던 것입니다.

초등학교 1, 2학년 수학이 대부분 수학의 시작점이고, 비율은 초등학교 5학년에 처음 배우는데, 비율을 분수로 본다면 초등학교 3학년을 그 시작점으로 볼 수 있습니다. 중 · 고등학교 수학 개념 대부분의 뿌리는 초등학교 수학에 있습니다. 초등수학에 연결되지 않는 중 · 고등학교 수학 개념은 거의 없습니다. 따라서 초등수학 개념을 명확히 알지 못한 상태에서 이루어지는 수학 공부는 그야말로 모래알로 집을 짓는 것과 같습니다. 이런 학생이 수포자가 될 확률은 100퍼센트에 가깝지요.

개념을 확장할 때는 새로 학습한 개념을 이전에 학습한 개념과 연결하는 '연결성'이라는 수학적 과정이 형성됩니다. 개념의 연결 방향은 당연히 오늘 이전입니다. 새로 학습한 개념을 이전에 학습한 개념과 모두 연결한 상태를 필자는 개념을 충분히 이해한 상태라고 정의합니다.

다음은 연결성 규준을 제시한 미국 수학교사연합회NCTM의 성취기준입니다.

- 수학적 아이디어 간의 연결성을 인식하고 활용할 수 있다.
- 수학적 아이디어가 서로 어떻게 연결되어 있는지 이해하고, 각각의 아이디어

에 기초하여 일관된 전체를 산출할 수 있다.

- 수학 이외의 상황에서 수학을 인식하고 활용할 수 있다.

연결성은 수학 내적인 연결성과 수학 외적인 연결성으로 나눌 수 있으며, 미국 NCTM의 교육과정Standards에서는 학생이 수학적 사고를 연결할 수 있을 때, 이해가 깊어지고 오래 지속된다고 설명합니다. 학생은 수학적 주제 간의 왕성한 상호작용 속에서, 수학을 다른 교과에 관련짓는 상황에서, 학생 자신의 흥미와 경험으로부터 수학적 연결성을 이해할 수 있습니다. 수학적 아이디어가 상호 관련되어 있음을 강조하는 수업을 통해 학생들은 수학뿐만 아니라 수학의 유용성에 대해서도 배울 수 있습니다.

연결성을 확보하는 것이 심화 학습이다

소수를 학습한 중 1에게 31×37이 소수인지를 묻는 질문에 90퍼센트 정도가 소수라는 오답을 낸다는 국제적인 연구가 있습니다. 실제로 실험을 해보면 소수가 아닌 이유를 정확하게 설명할 수 있는 학생은 극히 드뭅니다. 그렇다면 이런 문제를 풀 수 있는 능력은 어디서 길러질까요? 소위 심화 문제집으로 공부해야 하는 것일까요?

심화 문제집, 즉 경시대회용과 같은 어려운 문제집을 풀면 학생 스스로 해결할 수 없는 문제가 많아질 것이 분명합니다. 스스로의 능력으로 풀리지 않는 문제를 해결하는 방법으로 학생이 가장 많이 쓰는 방법은

문제 풀이 강의를 듣고 따라 풀거나 해답을 보고 그 기술을 익히는 것입니다. 그런데 꼭 이렇게 해야만 어려운 문제를 풀 수 있을까요?

소수의 개념을 확장하여 수학 내적으로 충분히 연결했을 때 이 문제를 풀 능력을 획득할 수 있다는 것이 개인적 생각입니다. 소수의 개념이 5학년의 약수까지만 연결되면 이 문제를 풀 아이디어를 얻지 못하지만, 나누어떨어지는 나눗셈과 그 이전 개념인 2학년의 곱셈으로 연결되면 이 문제를 풀 수 있는 개념을 갖추게 되는 것입니다.

실제로 연결해 보겠습니다. 초등학교 2학년 학생에게 소수는 서로 다른 두 자연수의 곱으로 나타낼 수 없는 수입니다. 즉, 1이 아닌 서로 다른 두 자연수의 곱으로 나타낼 수 있는 수는 소수가 아닙니다. 여기서 2×3으로 나타낼 수 있는 6은 소수가 아닌 것처럼 31×37도 소수가 아니라고 판단할 수 있는 능력을 획득할 수 있습니다.

이렇게 소수의 개념이 약수와 나눗셈을 넘어 곱셈까지 연결되는 '충분한' 개념학습을 거치면 소수에 대한 보다 높은 수준의 문제를 해결할 능력이 생깁니다. 이것이 심화 학습입니다. 진정한 의미의 심화 학습은 어려운 문제를 푸는 것이 아니라 개념을 깊이 있게 그 뿌리까지 확장하는 학습입니다. 개념의 충분한 이해라는 것은 학생이 연결할 수 있는 시작점까지 연결하는 것을 의미합니다.

연결의 능력과 속도는 학생마다 다릅니다. 따라서 연결성을 회복하며 수학의 내적 동기를 회복하고, 누구나 언젠가는 모든 수학 개념이 연결되는 순간을 맞이하게 된다는 가능성을 열어 두는 것이 진정한 수학교사의 마음 자세일 것입니다.

03 개념학습과 공식암기학습

1. 개념학습이란 무엇일까?

최대공약수 구하는 문제를 함께 보겠습니다. 두 수의 최대공약수의 정의는 두 수의 공약수 중 가장 큰 수입니다. 공약수는 두 수의 약수 중 공통인 수를 말합니다. 두 수 12와 30의 최대공약수를 구해 보지요.

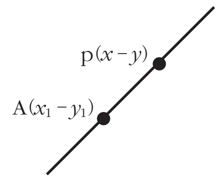
> 방법 ① 정의대로 두 수의 공약수를 구하기 위해서는 각각의 약수를 먼저 찾는다.
>
> 12의 약수 : 1, 2, 3, 4, 6, 12
>
> 30의 약수 : 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30
>
> 두 수의 약수 중 공통인 약수, 즉 공약수는 1, 2, 3, 6이고, 이 중 최대인 6이 두 수 12와 30의 최대공약수다.

> 방법 ② 최대공약수를 찾는 보다 쉬운 방법은 오른쪽 그림과 같이 두 수를 공통으로 나누는 수를 차례로 찾아 더 나눠지는 수가 없을 때까지 계산하는 것이다. 두 수 12와 30을 공통으로 나누는 수는 2와 3이고, 최대공약수는 이 두 수의 곱 6과 같다.

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 12 & 30 \\ \hline 3 & 6 & 15 \\ \hline & 2 & 5 \end{array}$$

방법 ①은 개념적인 풀이이고, 방법 ②는 절차적인 풀이입니다. 여기서 개념적인 풀이는 정의를 이용하는 풀이라고 말할 수 있습니다. 개념적으로 문제를 해결하는 것을 개념학습, 절차적으로 문제를 해결하는 것을 공식암기학습이라고 할 수 있습니다.

또 다른 문제를 보겠습니다. 고등학교 때 배우는 직선의 방정식은 통상 그 직선이 지나는 한 점의 좌표와 기울기가 주어진 경우에서 시작됩니다. 한 점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선 위 임의의 점을 $P(x, y)$라 하면 $\frac{y-y_1}{x-x_1}=m$이므로 이를 정리하면 $y=m(x-x_1)+y_1$이라는 직선의 방정식이 나옵니다. 교과서는 이 식을 중요하게 정리하고 있으며, 수업에서 교사는 이 식을 공식처럼 암기시키는 것이 보통입니다.



이 학습이 끝나면 두 번째 경우로 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하게 됩니다. 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$이므로 첫 번째 구한 직선의 방정식에 m 대신 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$을 대입하면 $y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$이라는 아주 복잡한 식이 나옵니다. 이 식도 학생에게는 암기의 대상이 됩니다.

그렇다면 세 점 A(2, 1), B(−3, 5), C(α, 2)가 일직선 위에 있도록 하는 a의 값을 구하는 문제를 학생들은 어떻게 풀까요? 바람직한 풀이는 세 점이 일직선 위에 있으므로 직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같다는 생각으로 $\frac{1-5}{2-(-3)} = \frac{2-5}{\alpha-(-3)}$라는 식을 세우고, 이 식을 계산해서 $\alpha = \frac{3}{4}$의 값을 얻는 것입니다.

그런데 직선의 방정식의 결과만 암기한 학생이라면 이러한 식을 세울 수가 없습니다. 암기하고 있는 직선의 방정식의 결과를 이용해서 풀려고 할 것입니다. 먼저 두 점 A(2, 1), B(−3, 5)를 지나는 직선의 방정식을 공식에 대입하면, $y=\frac{1-5}{2-(-3)}(x-2)+1$에서 $y=-\frac{4}{5}x+\frac{13}{5}$이 되고, 점 C(α, 2)가 이 직선 위에 있으므로 이를 대입하면 $2=-\frac{4}{5}\alpha+\frac{13}{5}$, $\alpha=\frac{3}{4}$의 값이 나옵니다.

첫 번째 풀이는 직선의 방정식을 유도하는 과정에서 나오는 기울기의 정의를 이용한 것이고, 두 번째 풀이는 그 결과로 나온 직선의 방정식을 구하는 공식을 이용한 것입니다. 첫 번째 풀이가 개념적인 풀이고, 두 번째 풀이가 절차적인 풀이입니다.

정리하자면 공식이나 계산 절차를 이용하는 풀이는 절차적인 풀이, 개념적인 풀이는 공식의 유도 과정 또는 정의를 이용하는 풀이입니다.

2. 공식암기학습의 단점

수학을 공부하는 방식을 말할 때 가장 강조하는 것은 수학의 개념을 정

확히 이해하고 나서 문제를 풀라는 것입니다. 순서가 중요합니다. 개념도 모르고 문제를 푸는 것은 불가능합니다. 그러나 문제를 많이 풀다 보면 어느 순간부터 개념보다 공식, 문제 푸는 요령에 익숙해져서 기계적으로 문제를 풀게 됩니다. 이런 공식암기학습법에는 다음과 같은 문제가 있습니다.

첫째, 문제를 많이 풀어도 개념은 강화되지 않고 문제 풀이 기술만 늘어납니다. 그런데 문제 푸는 기술이 늘어나면 문제를 해결할 때마다 과거에 이런 문제를 어떻게 풀었는지 생각하는 습관이 형성됩니다. 그러다 경험해 본 적 없는 문제가 닥치면 해결하려는 시도도 하지 못하는 경우가 대부분입니다. 경험해 본 문제도 기억이 잘못되어 엉뚱한 공식이 생각나면 엉뚱한 결론을 내게 됩니다. 심지어 개념학습을 하더라도 비슷한 문제를 반복적으로 많이 풀면 공식암기학습으로 변환되어 개념이 사라질 우려가 생깁니다.

둘째, 공식암기학습에서는 개념이 강화되지 않으며, 그나마 가지고 있던 개념이 도태되어 버리는 경우가 생깁니다. 수학 개념은 평상시 일상생활에서 자주 사용되지 않으므로 자주 그 개념을 상기하고 강화시켜 주어야만 합니다. 그런데 공식을 많이 사용한다든가 문제 푸는 요령만을 사용하면, 개념을 상기하고 강화시킬 기회가 줄어들어 결국 장기 기억 속에서 개념이 사라지고 맙니다.

3. 공식암기학습의 장점

공식암기학습에 단점만 있는 것은 아닙니다. 때로는 절차적인 이해가 필요합니다. 다음 경우에는 공식암기학습이 효과적입니다.

첫째, 내용 자체가 공식암기학습을 적용하면 용이한 부분이 있습니다. 예를 들어 유리수의 사칙연산이 그렇습니다. 분수의 나눗셈에서 분자와 분모를 바꾸어 곱하는 내용은 개념적으로 이해하는 것이 어렵고 시간도 많이 걸립니다. 공식을 암기하여 학습한 이후에 시간 여유가 있을 때 개념을 이해하는 방법을 사용할 수 있습니다.

둘째, 공식암기학습은 문제에 대한 답을 빠르고 쉽게 구할 수 있기 때문에 시험을 앞둔 시점에서는 효과적일 수 있습니다. 그리고 그 보상이 즉각적이며 명확하다는 점에서 일시적인 성취감과 자신감을 주기도 합니다. 모든 수학의 원리와 개념을 이해해야만 한다고 하면 중위권 이하 학생은 아예 포기할 가능성이 큽니다. 그러므로 하위권 학생의 자신감 회복을 위해서라면 개념학습보다 공식암기학습이 유용할 수 있습니다.

셋째, 개념적인 이해는 수학의 많은 배경지식을 요구하는 반면, 절차적 이해는 배경지식이 없어도 학습이 이루어질 수 있습니다. 그러므로 초등수학 지식이 많이 부족한 중학생이 초등 선수 지식이 필요한 부분을 학습할 때는 우선적으로 공식암기학습을 하고, 나중에 초등 개념을 익혀서 다시 개념학습을 하는 것이 효과적일 것입니다.

넷째, 특정한 과제 하나만을 학습할 때는 절차적인 이해가 빠르고 효과적입니다. 그러나 각 과제마다 별도의 절차가 존재하고, 이런 절차를 그 많은 과제마다 기억해야 한다면 언젠가는 한계가 올 것입니다.

4. 개념학습의 장점

수학을 개념적으로 또는 관계적으로 이해하고 공부하는 것에는 여러 장점이 있습니다.

첫째, 연결 능력이 키워집니다. 개념 사이의 관계는 질적으로 유기적이기 때문입니다. 수학의 공식에서 유기적 관계를 발견하기는 어려운 일입니다. 유기적 관계는 개념이나 정의 사이에 주로 존재합니다. 그러므로 서로 연결되는 지점은 공식이 아니라 개념이나 정의 정도까지 내려가야 찾을 수 있습니다. 개념적으로 공부하지 않으면 여러 개념을 서로 연결할 수 없겠지요.

둘째, 응용 능력이 키워집니다. 수학을 개념적으로 이해하면 새로운 과제에 적응하기가 용이합니다. 개념이 풍부해지고 연결성이 강해지면 응용과 적응은 절로 이루어지지요. 새로운 문제가 닥쳤을 때 문제에서 요구하는 개념이 이미 알고 있는 개념과 연결되면 문제는 어렵지 않게 풀립니다. 반대로 개념이 부족하거나 이미 알고 있는 개념과 잘 연결시킬 수 없다면 문제가 쉽게 풀리지 않겠지요. 곧, 개념이 별로 없는 상태에서는 절차나 도구만으로 개념을 연결시킬 수 없으니 문제를 잘 풀 수가 없습니다.

흔히 응용력이 부족하다는 말을 하지요. 응용력은 타고나는 별도의 능

력이 아니라 개념이나 논리를 충분히 이해하면 생기는 능력입니다. 개념이 없는 것은 응용할 준비가 되지 않은 것과 같습니다. 응용력은 개념이 탄탄해지면 저절로 연결성이 늘어나 생기는 능력입니다.

분모가 다른 분수의 대소 비교를 개념적으로 이해한 학생은 통분과 단위분수의 개념, 즉 분자가 1인 분수의 개념을 모두 이해하고 있기 때문에 분모가 다른 분수의 덧셈을 금방 해낼 수 있습니다. 하지만 분모가 같은 분수의 대소를 비교할 때는 분자만 비교하면 된다는 절차적 지식, 즉 공식만 습득한 학생은 분모가 다른 분수의 덧셈에 이 공식을 적용할 수 없기 때문에 따로 학습해야 합니다.

셋째, 개념적으로 이해된 지식은 기억하기가 쉽기 때문에 장기 기억으로 저장됩니다. 원천 개념 하나를 정확히 이해하면 관계적으로 연결되어 있는 개념은 필요할 때마다 어렵지 않게 끄집어낼 수 있는데, 연결성을 생각할 때마다 그 기억은 강화되고 반복되므로 장기 기억 속에 계속 남아 있게 됩니다.

넷째, 개념적으로 공부한 학생은 수학을 좋아하게 됩니다. 수학을 개념적으로 공부하면 여러 개념이 서로 연결되는 경험을 하게 되는데, 여러 가지가 연결되면 서로 모이게 되고, 또 하나로 변신하는 데서 재미를 느낄 수 있습니다. 개념적인 이해 그 자체로 내적 동기가 강해지기 때문에 결국 수학을 좋아하게 되지요.

04 3단계 개념학습법

1. 정의를 이해하는 1단계 개념학습

1단계는 정의를 이해하는 과정입니다. 정의는 교과서에 나온 그대로 받아들여야 하고 깊이 새겨야 합니다. 개념의 정의 그 자체를 이해하는 것이지요. 흔히 정의는 약속이므로 그냥 받아들여 암기해야 한다고 하는데, 정의 자체를 이해하려면 그렇게 정의한 이유를 생각해 봐야 합니다. 단순히 암기한다면 언젠가는 기억에서 사라질 것입니다.

예를 들어 분수의 정의에서 "어떤 것을 '똑같이' n개로 나눈 것 중 하나를 $\frac{1}{n}$이라 한다"고 할 때 '똑같이'라는 개념은 어느 순간 사라집니다. 중학교나 고등학교에서 배우는 확률도 분수로 나타내기 때문에 똑같다는 개념이 나오는데, 대부분의 학생이 확률에서 똑같다는 개념에 주목하지 않습니다. 확률의 정의에서 일어날 수 있는 전체 경우가 갖춰야 할 전

제 조건은 각 경우가 일어날 가능성이 똑같아야 한다는 것입니다. 확률이 분수로 표현되기 때문에 초등학교 3학년에서 나온 분수의 정의와 일관성이 유지되는 것을 알 수 있지요. 초등학교 3학년에서 분수를 정의할 때 똑같다는 개념을 강화하려면 똑같지 않은 상황을 접하면서 당황하는 학습이 필요합니다. 이를 통해 앞으로 분수를 쓸 때는 분모에 해당하는 각 경우가 모두 똑같은지를 따져야 한다는 개념을 갖추게 됩니다.

중 1에서 소수의 정의는 "1보다 큰 자연수 중 1과 자기 자신만을 약수로 가지는 수"입니다. 그런데 소수를 공부하고 한두 달만 지나면 소수의 정의에서 '1보다 큰 자연수 중'이라는 단서가 희미해집니다. 이유가 뭘까요? 소수를 왜 1보다 큰 자연수 중에서만 생각해야 하는지 고민하지 않았기 때문입니다. 우리나라 교과서에는 친절하게 "1은 소수도 합성수도 아니다"라고 제시되어 있습니다. 이 내용을 당연하게 받아들이고 암기한 학생은 더 고민하지 않고 넘어갈 것입니다. 왜 1을 소수에서 제외했는지 고민한 적 없는 학생에게는 언젠가 1보다 큰 자연수 중에서 소수를 생각한다는 개념이 사라지고 맙니다.

수학교과서에 나오는 모든 개념에 대해서는 반드시 왜 그런지를 학습해야 합니다. 그래야만 정의가 정확히 이해되고 이 기억을 장기 기억으로 보낼 수 있습니다. 정의를 이해하는 방법은 여러 가지겠지만 그중 하나는 정의 자체를 부정하는 것입니다. 만약 정의가 그렇게 되지 않았다면 어떻게 되었을까를 고민해 보면, 결국 이 정의가 최선이고, 이렇게 될 수밖에 없었음을 필연적으로 이해하게 됩니다.

시험에서는 개념을 묻는 문제가 진짜 어렵고 중요한 문제입니다. 우리나라 시험에는 이런 문제가 별로 없습니다. 개념을 묻는 문제는 이미 만들어진 정의와 공식을 이용하는 문제가 아니라 그 개념이 만들어지는 과정에서 도출된 여러 가지 내용에 대한 질문입니다. 이때는 이미 외운 개념이나 공식을 이용할 수 없기 때문에 수학적 사고력을 발휘하지 않으면 해결하기가 어렵습니다.

퇴직 후 처음으로 초등학교 교과서에 나오는 분수의 정의를 보게 되었는데, 그 내용은 $\frac{1}{4}$이라는 분수의 정의였습니다. 사과 한 개를 4조각 낸 것 중 하나가 $\frac{1}{4}$이 아니라, 사과 한 개를 똑같은 크기로 4조각 내야만 $\frac{1}{4}$이라는 분수가 정의된다는 것이었지요. 똑같이 나눌 때만 분수를 쓴다는 얘기였어요. 순간, 고등학생에게 확률 개념이 왜 부족한지 알게 되었습니다. 고등학생들은 똑같지 않은, 즉 등분할이 아닌 상황에서는 분수를 쓸 수 없다는 사실을 모르고 있습니다. 필자도 그것이 중요함을 정확히 가르치지 못했습니다. 확률의 학문적인 개념은 더 복잡하고 다양하지만, 초등학교 분수의 정의가 곧 고등학교 확률의 정의라 해도 과언이 아닙니다.

이 상황에서 분수를 정확히 이해하려면 똑같지 않은 상황에서 분수를 만들어 보면 됩니다. 즉, 피자를 아무렇게나 8조각 내고 8명이 $\frac{1}{8}$씩 먹는다고 할 때 크기가 작은 조각을 먹은 사람은 $\frac{1}{8}$을 먹었다고 생각하지 않을 것입니다. 똑같이 나누지 않았기 때문이지요. 이렇게 똑같지 않으면 분수가 될 수 없다는 사실을 접하고 나면 똑같이 나눌 때만 분수를 쓴다는 개념을 확실히 이해하게 될 것입니다.

2. 공식을 유도하는 2단계 개념학습

개념학습의 다음 단계는 공식이나 성질을 이해하는 것입니다. 그런데 이 성질, 즉 정리, 법칙, 공식 등은 개념의 정의나 다른 성질로부터 논리적으로 유도되어야 합니다. 그 유도 과정을 공부하는 것이 2단계 개념학습입니다. 공식을 암기하면 문제 풀이에 효과적인 면이 많지만 억지로 암기하기보다 유도하는 과정을 통해 저절로 기억되게 하는 것이 가장 이상적이지요. 단순한 공식암기학습은 개념을 충분히 이해하지 못한 상태에서 문제를 풀었을 때 나타나는 학습법입니다.

공식 유도 과정은 스스로 도출할 수 있으면 가장 좋습니다. 하지만 일종의 증명 과정이라고도 할 수 있는 공식 유도 과정은 상당한 능력을 필요로 합니다. 그래서 혼자 힘으로 해결할 수 없는 경우도 있을 수 있습니다. 스스로 도출하기 어려우면 유도 과정을 보고 이해하는 정도만으로도 충분합니다. 그것도 어려우면 친구나 교사의 도움을 받아 이해하려고 노력하는 방법도 가능합니다.

3. 이전 개념과 연결하는 3단계 개념 확장

3단계는 지금 배운 개념을 이전과 연결시키는 것입니다. 새로운 수학 개념을 학습하면 그 개념과 연결된 이전의 개념을 모조리 끌어내 연결하는 것이지요. 이렇게 해야 개념을 충분히 이해한 것으로 생각할 수 있습니다. 이런 과정을 거치며 수학의 개념은 결국 모두 연결되어 있다는 생각을 갖게 되면 내적 동기가 커지면서 수학을 좋아하게 됩니다. 개념이 충분히 연결되면 심화 문제나 사고력 문제가 해결될 것입니다. 문제 풀이 기법이나 공식을 외워서가 아니라 자기 힘으로 어려운 문제를 풀어 냈을 때의 기쁨은 이루 말할 수 없겠지요.

수학의 개념이 모두 연결되어 하나가 된다는 생각은 수학은 위대한 학문이라는 생각으로 연결되고, 이는 다시 수학의 필요성을 자각하게 합니다. 또 새로운 개념은 내가 알고 있는 개념과 비슷할 뿐이므로 새로운 개념이 나왔다고 해서 새로 시작해야 하는 것이 아님을 거듭 체험하다 보면 자신의 개념 영역 역시 어느새 넓어져 있을 것입니다.

개념을 충분히 이해했다고 말할 수 있으려면 1, 2, 3단계의 학습을 다 마쳐야 하는데, 이때 3단계에서의 개념 연결은 과연 어디까지 이루어져야 할까요? '충분히'라는 말에서 짐작할 수 있듯이 '끝까지', 즉 수학의 시작점까지 내려가면서 연결시켜야 충분한 정도가 됩니다. 그래서 결국 초등수학까지 가야 하는 것이고, 수학을 하는 입장에서는 공리까지 가야 충분하다고 할 수 있습니다.

3단계 개념학습법 중 1단계 정의(뜻) 이해 학습과 2단계 정리(공식, 성질, 법칙 등) 유도 학습은 교과서에 명시된 것이므로 그대로 할 수 있습니다. 하지만 3단계 개념 확장 학습은 쉽지 않습니다. 교과서에서는 이전 개념과 연결 상태가 간단하게만 이루어지므로 깊이 있는 연결은 본인 스스로 해야만 합니다.